

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ MAPLE

У тезах розглянуто візуалізацію розв'язків деяких задач математичної фізики, отриманих чисельними методами із застосування математичного пакету Maple, таких як: змішана крайова задача для рівняння коливання струни, рівняння теплопровідності та задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Хоча змішані крайові задачі мають певні складнощі, існує потужний арсенал чисельних методів та програмних інструментів, які дозволяють їх розв'язувати. Використання Maple для чисельного розв'язання задач математичної фізики дає змогу студентам-комп'ютерникам та інженерам сконцентруватися на суті проблеми, їм не доводиться витрачати час на складну реалізацію чисельних алгоритмів. Вивчення чисельних методів передбачає їхню програмну реалізацію, що сприяє розвитку навичок програмування, особливо в області роботи з масивами даних, розробки ефективних алгоритмів та оптимізації коду. Фахівці з глибоким розумінням чисельних методів є затребуваними у багатьох галузях, включаючи IT-компанії, саме тому при вивченні таких методів ми поєднуємо застосування математичного пакету Maple та програмної реалізації на різних мовах програмування.

Ключові слова: диференціальні рівняння з частинними похідними, чисельні методи, метод сіток, рівняння математичної фізики, Maple.

Рівняння математичної фізики – це клас диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), які описують різноманітні фізичні явища. Невідома функція $U = U(t, x, y, z)$ у таких рівняннях залежить від багатьох змінних (зазвичай це час t та просторові координати x, y, z). Найчастіше використовуються рівняння другого порядку, оскільки згідно із законами механіки перша похідна – швидкість, а друга – прискорення.

Окрім ДРЧП другого порядку математична модель задач математичної фізики містить ще додаткові умови: початкові та/або крайові. Ці умови потрібні для того, щоб виділити єдиний фізично змістовний розв'язок. У фізиці, механіці та інженерії часто зустрічаються змішані крайові задачі, в яких комбінують різні типи умов (початкові та крайові). Використання чисельних методів до розв'язування таких задач зумовлене багатьма вагомими причинами: вони подають наближений розв'язок у вигляді набору чисел у вузлах сітки, що легко піддається аналізу та візуалізації, на відміну від аналітичного розв'язку, який може мати вигляд нескінчених рядів чи інтегралів, крім того, іноді вони дозволяють отримувати наближені розв'язки для задач, які є абсолютно недоступними для аналітичних методів.

Існує багато потужних програмних пакетів, які реалізують чисельні методи та надають інструменти для візуалізації результатів. Одним із таких пакетів є Maple. Maple є лідером у знаходженні аналітичних розв'язків ДРЧП, він володіє великою бібліотекою відомих розв'язків ДРЧП та різними методами, такими як метод характеристик, використання симетрій Лі та інтегральних перетворень. У випадку неможливості відшукування аналітичного розв'язку у Maple можна знайти чисельні розв'язки, підключивши спеціальні пакети. Також Maple дає потужні інструменти для візуалізації отриманих розв'язків ДРЧП у вигляді графіків, поверхонь, що допомагає зрозуміти поведінку розв'язку та вплив крайових умов. Тому саме Maple з його потужними символьними та чисельними можливостями, а також з можливістю візуалізації, роблять його ефективним для використання студентами, інженерами та дослідниками при вивченні рівнянь математичної фізики [1, 2].

Найбільш поширеним методом розв'язання задач математичної фізики є метод сіток [3, 4]. Він є простим у розумінні та реалізації, ефективним для задач з простими геометричними областями. Сутність цього методу полягає в тому, що неперервну область, в якій шукають розв'язок задачі замінюють дискретною сіткою вузлів. Вузлами цієї сітки є точки $(x_i, t_j) = (x_0 + ih, t_0 + jk)$, де h, k – відповідно крок по осях Ox та Ot , $i, j = 0, 1, \dots$. Невідому функцію $U(x, t)$ шукають наближено у вузлах сітки, використовуючи позначення $U_{ij} = U(x_i, t_j)$. Частинні похідні у вузлах сітки апроксимуються скінчено-різницевиими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k}, & U_x &= \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h}, \\ U_{tt} &= \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}, & U_{xx} &= \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Рівняння коливання струни. Розглянемо змішану крайову задачу для рівняння коливання струни:

$$U_{tt} = U_{xx}, \quad (2)$$

з граничними умовами:

$$U(0, t) = p(t), \quad U(L, t) = q(t), \quad (3)$$

та початковими умовами:

$$U(x, 0) = f(x), \quad U_t(x, 0) = g(x). \quad (4)$$

Розв'язок будемо шукати в області $D: \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq +\infty\}$. Початкові та крайові умови повинні бути узгодженими, тобто:

$$p(0) = f(0), \quad q(0) = f(L), \quad p'(0) = g(0), \quad q'(0) = g(L).$$

Використовуючи (1) замінимо задачу (2)-(4) її скінчено-різницеvim аналогом:

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad (5)$$

$$U_{0,j} = p_j, \quad U_{n,j} = q_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$U_{i,0} = f_i, \quad U_{i,1} = U_{i,0} + kg_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Умови (6)-(7) задають значення функції $U(x, t)$ на границі області D . Якщо позначити через $\lambda = \frac{k}{h}$, то рівняння (5) зведеться до вигляду

$$U_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2)U_{i,j} + \lambda^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1}, \quad i = \overline{1, n-1}; j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Розв'язок різницевої задачі (5)-(7) рівномірно збігається з розв'язком крайової задачі (2)-(4) при $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, якщо $\lambda < 1$, тобто $k < h$.

Розв'язок у Maple подається у вигляді таблиці значень шуканої функції $U(x, t)$ у вузлах сітки. Більш цікавим є отримання візуалізації розв'язків задачі таких як, форма струни в певний момент часу t або зміна $U(t)$ у фіксованих точках x :

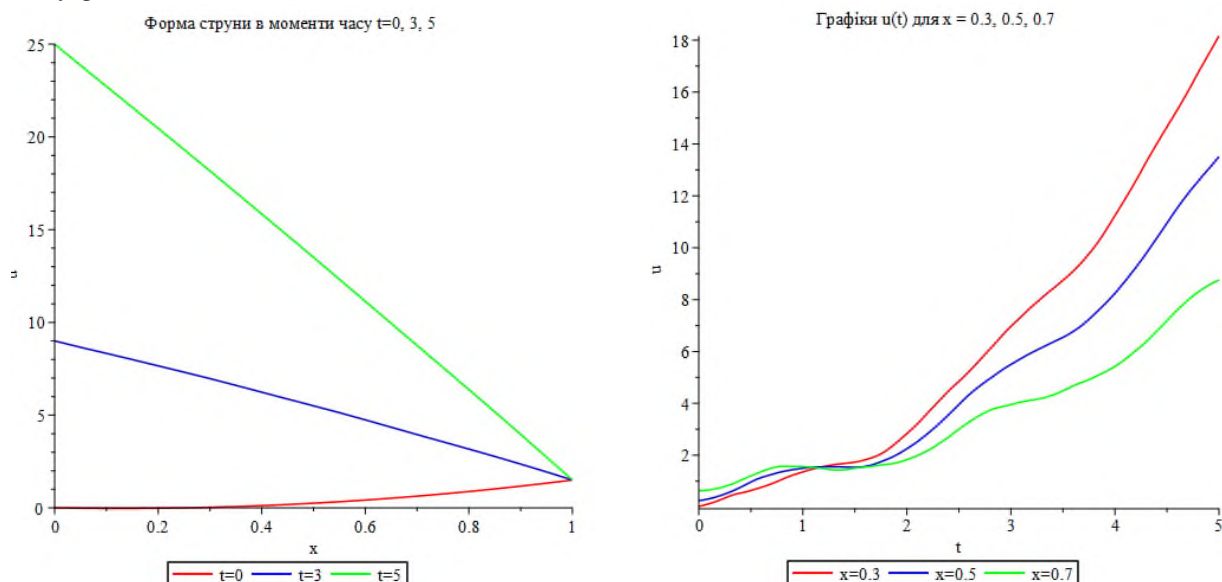


Рис. 1. Візуалізація розв'язків, отриманих для змішаної крайової задачі рівняння коливання струни в Maple.

Рівняння теплопровідності. Розглянемо ДРЧП параболічного типу на прикладі рівняння теплопровідності. Змішана крайова задача для такого рівняння має вигляд:

$$U_t = U_{xx}, \quad (9)$$

з граничними умовами:

$$U(0, t) = p(t), \quad U(L, t) = q(t), \quad (10)$$

та початковою умовою:

$$U(x, 0) = f(x). \quad (11)$$

Розв'язок будемо шукати в області $D: \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq +\infty\}$. Початкова та крайові умови повинні бути узгодженими, тобто:

$$p(0) = f(0), \quad q(0) = f(L).$$

Використовуючи (1) замінимо задачу (9)-(11) її скінчено-різницеvim аналогом:

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad (12)$$

$$U_{0,j} = p_j, \quad U_{n,j} = q_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad U_{i,0} = f_i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (13)$$

Умови (13) задають значення функції $U(x, t)$ на границі області D . Якщо позначити через $\lambda = \frac{k}{h^2}$, то рівняння (12) зведеться до вигляду

$$U_{i,j+1} = \lambda U_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)U_{i,j} + \lambda U_{i+1,j}, \quad i = \overline{1, n-1}; j = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Процес розв'язання збігається і є стійким, якщо $\lambda \leq 0.5$, тобто $k < \frac{h^2}{2}$.

У рівнянні (9) функція $U(x, t)$ задає температуру в будь-якій точці стержня довжиною L на момент часу t . Візуалізація розподілу температур в різні моменти часу, отримана в Maple та Phyton продемонстрована на рис. 2.

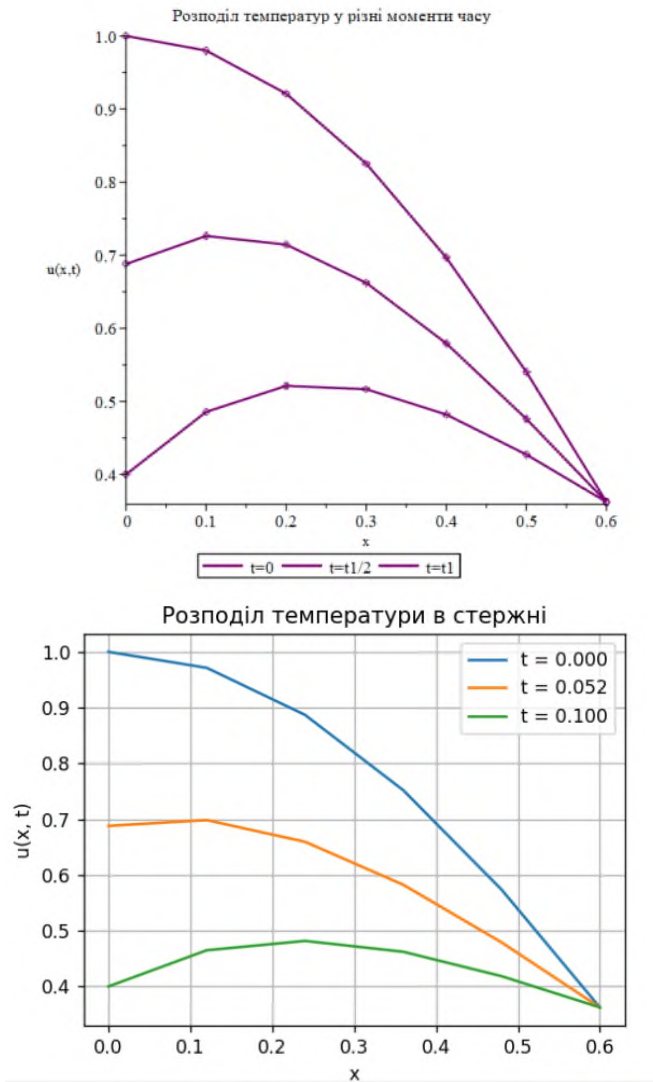


Рис. 2. Візуалізація розподілу температур в різні моменти часу, отримана в Maple та Phyton.

Задача Діріхле для рівняння Лапласа. Розглянемо рівняння еліптичного типу, до яких приводять дослідження стаціонарних процесів, коли шукана функція не залежить від часу. Прикладом такого рівняння є рівняння Лапласа. Розглянувши його з граничними умовами по координатах x, y , отримаємо першу крайову задачу або задачу Діріхле:

$$\Delta U = 0, \quad U(x, 0) = f(x), \quad U(x, b) = g(x), \quad U(0, y) = p(y), \quad U(a, y) = q(y). \quad (15)$$

Розв'язок будемо шукати в області $D: \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$.

Використовуючи (1) замінимо задачу (15) її скінчено-різницевою аналогом:

$$\frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} + \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} = 0, \quad (16)$$

або

$$2(h^2 + k^2)U_{i,j} = k^2(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + h^2(U_{i,j+1} + U_{i,j-1}), \quad i = \overline{1, n-1}; j = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Знаходимо значення $U_{i,j}$, які відповідають граничним вузлам завдяки граничним умовам (15). Для всіх внутрішніх вузлів сітки запишемо рівняння (17) та отримаємо СЛАР з досить великою кількістю рівнянь та невідомих. Отриману систему алгебраїчних рівнянь можна розв'язати, використовуючи прямі або ітераційні методи [5].

Візуалізація отриманого розв'язку задачі (15) в Maple:

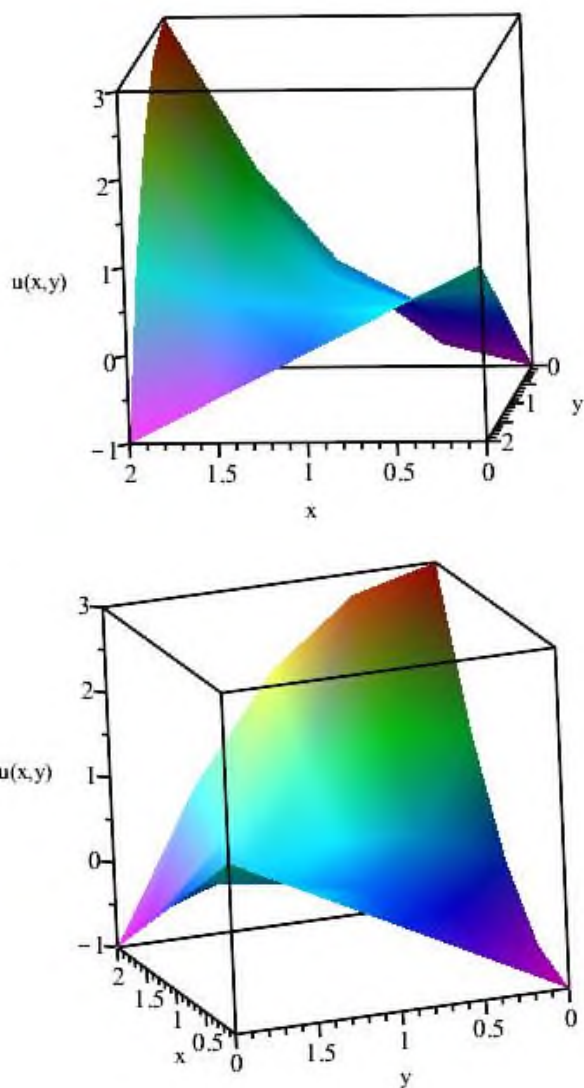


Рис. 3. Візуалізація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа в Maple.

Використовуючи чіткі алгоритми чисельних методів для розв'язання задач математичної фізики студентам пропонується написати програми з візуалізацією отриманих розв'язків будь-якою мовою програмування, наприклад на C++, Python або Java, та провести аналіз програмної реалізації з розв'язанням в середовищі Maple.

Висновки. Використання програмних пакетів та програмної реалізації до вивчених методів значно скорочує час, який необхідно витратити для отримання розв'язку складної задачі. Є можливість отримати результат за досить короткий час замість багатьох годин ручної роботи, що дозволяє більше зосередитися на аналізі результатів та прийнятті рішень. Крім того, програмні пакети добре протестовані, тому забезпечують більш точні та надійні результати. За допомогою програмної реалізації є можливість отримати не тільки розв'язок поставленої задачі, а ще й візуалізацію результатів, що значно полегшує розуміння складних процесів.

References

1. Nikitenko O.M. (2014). Maple: Solving engineering and scientific problems: a training manual. Kharkiv: NURE, 289 p. [in Ukrainian].
2. Vorobyova A.I., Kuriksha O.V. (2009) Symmetric analysis of partial differential equations using the Maple mathematical package. Scientific works of the Petro Mohyla Black Sea State University. Ser.: Computer Technologies, 106, vol. 93, pp. 75-79. [in Ukrainian].
3. Andrunyk V.A., Vysotska V.A., Pasichnyk V.V., Chyrun L.B., Chyrun L.V. (2020). Numerical Methods in Computer Science: Textbook - Lviv: Vydavnytstvo «Novyy svit – 2000», 470 p. [in Ukrainian].
4. Goy T.P., Kopach M.I., Fedak I.V. (2010) Approximate methods for solving differential equations. A textbook for students of the “mathematics” and “applied mathematics” training areas. – Ivano-Frankivsk: Publishing and

design department of the Center for Information Technologies of Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 148 p. [in Ukrainian].

5. Brahinets O., & Vorobyova A. (2022). Using the mathematical program Maple to solve systems of linear algebraic equations by direct numerical methods. Computer-integrated technologies: education, science, production, (47), 55-63. <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2022-47-08> [in Ukrainian].

DOI 10.34132/mspc2025.01.14.05

Oksana Brahinets

VISUALIZATION OF NUMERICAL SOLUTIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS EQUATIONS USING MAPLE

The theses consider the visualization of solutions to some mathematical physics problems obtained by numerical methods using the Maple mathematical package, such as: a mixed boundary value problem for the string oscillation equation, the heat conduction equation, and the Dirichlet problem for the Laplace equation. Although mixed boundary value problems have certain difficulties, there is a powerful arsenal of numerical methods and software tools that allow them to be solved. Using Maple for numerical solution of mathematical physics problems allows computer science students and engineers to concentrate on the essence of the problem, they do not have to waste time on complex implementation of numerical algorithms. The study of numerical methods involves their software implementation, which contributes to the development of programming skills, especially in the field of working with data sets, developing effective algorithms and optimizing code. Specialists with a deep understanding of numerical methods are in demand in many industries, including IT companies, which is why when studying such methods we combine the use of the mathematical package Maple and software implementation in various programming languages.

Keywords: partial differential equations, numerical methods, grid method, equations of mathematical physics, Maple.

Відомості про автора / Information about the Author

Оксана Брагінець, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету імені Петра Могили, м. Миколаїв, Україна. E-mail: oksana.brahinets@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2635-7203>.

Oksana Brahinets, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent of the Department of Intellectual Information Systems of the Petro Mohyla Black Sea National University, Mykolaiv, Ukraine. E-mail: oksana.brahinets@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2635-7203>.

© О. Брагінець
19.05.2025.

Стаття отримана редакцією

